

**Національний центр аерокосмічної освіти молоді ім. О.М.Макарова**

*Заочна аерокосмічна школа  
"Всесвіт"*

## **МЕХАНІКА ТІЛ ЗМІННОЇ МАСИ**

Методичні розробки і завдання № 2

Підготував кандидат технічних наук, доцент ДНУ

**В.Ю.Шевцов**



м. Дніпропетровськ  
2011

## Зміст

ПЕРЕДМОВА .....	2
1. ПРОЕКТНІ ПАРАМЕТРИ РАКЕТ.....	2
2. РУХ БАГАТОСТУПЕНЕВИХ РАКЕТ.....	4
3. РОЗРАХУНОК ЛЬОТНО-ТЕХНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК (Л-Т.Х) РАКЕТ ТА КА.....	5
4. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.....	6
5. ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ.....	6
ПРИКЛАД 1.....	6
ПРИКЛАД 2.....	7
6. ВПРАВИ.....	7
ЛІТЕРАТУРА .....	8

## Передмова

В першому завданні ми розглянули поняття імпульсу, енергії та закони їх збереження, одержали перші уявлення про реактивний рух, формулу Ціолковського, силу тяги; навчилися визначити прискорення та шлях, пройдений ракетою. Але це ще не всі параметри реактивного руху, і тому в цьому завданні ми продовжимо нашу подорож до механіки тіл змінної маси.

### 1. Проектні параметри ракет

Під проектними параметрами ракет розуміють такі показники, які безвідносно до конкретної моделі дають уявлення про ту чи іншу якість ракети. До проектних параметрів належить уже знайоме нам число Ціолковського  $Z$ . Якщо число Ціолковського однієї ракети  $Z_1$ , а другої  $Z_2 > Z_1$ , то енергетичні можливості другої ракети більші і вона може реалізувати більшу швидкість польоту, а, відповідно, і дальність. Отже число Ціолковського характеризує енергетичну якість спроектованої ракети.

Замість числа Ціолковського можуть використовуватись параметри дублери, до яких відносяться відносна кінцева маса ракети

$$\mu_k = \frac{M_k}{M_o} = \frac{1}{\frac{M_o}{M_k}} = \frac{1}{Z}, \quad (1)$$

та відносна маса палива

$$\mu_{\text{п}} = \frac{M_{\text{п}}}{M_o} = \frac{M_o - M_k}{M_o} = 1 - \mu_k = 1 - \frac{1}{Z}, \quad (2)$$

де  $M_o$  і  $M_k$  початкова і кінцева маса ракети,  $M_{\text{п}}$  - маса палива на борту ракети.

Проектні параметри вибираються в залежності від задачі проектування і їх склад може змінюватись. Але, для більшості задач, найбільш вживаними є:

а) коефіцієнт тягоозброєності

$$\mu_o = \frac{P_o}{G_o}, \quad (3)$$

де  $P_o$  і  $G_o$  - початкові тяга двигуна і вага ракети. Параметром - дублером коефіцієнта тягоозброєності є коефіцієнт енергоозброєності, який використовується частіше в літакобудуванні:

$$\nu_o = \frac{G_o}{P_o} = \frac{1}{P_o / G_o} = \frac{1}{\mu_o}; \quad (4)$$

б) питомий імпульс, тобто імпульс тяги  $J$ , що приходиться на одиницю маси газів реактивного струменю. Якщо записати закон збереження імпульсу тіла в вигляді

$$mW = P_o t = J, \quad (5)$$

де  $m$  - маса газу, що витікає з двигуна за час  $t$ ,

$W$  - швидкість витoku газів,

потім розділити ліву і праву частини на  $m$ , то отримуємо імпульс, що приходить на одиницю маси, або питомий імпульс:

$$W = \frac{P_o t}{m} = \frac{J}{m} = J_{\text{пит}} = \frac{P_o}{m \dot{m}} = \frac{P_o}{\dot{m}}, \quad (6)$$

де  $\dot{m}$  - секундна витрата маси палива.

Як видно з (6) значення питомого імпульсу співпадає з швидкістю витoku реактивного струменю газів і дорівнює силі тяги, яку можна отримати при згоранні одиниці маси палива.

**Зауваження:** якщо сила тяги вимірюється в [н] - н'ютонах, а  $\dot{m}$  в [кг/с], то отримуємо  $W$  в [м/с].

Ще одним параметром - дублером питомого імпульсу є питома тяга

$$R_{\text{пит}} = \frac{P_o}{\dot{G}} \left[ \frac{\text{кгс}}{\text{кгс/с}} \right], \quad (7)$$

тобто сила тяги, що розвивається при згоранні одиниці ваги палива ( $\dot{G}$  - вагова секундна витрата палива). Порівнюючи (6) і (7) можна знайти залежність між  $R_{\text{пит}}$  і  $J_{\text{пит}}$ :

$$J_{\text{пит}} = W = g_o R_{\text{пит}}, \quad (8)$$

де  $g_o = 9,8 \text{ м/с}^2$  - прискорення сили тяжіння на поверхні Землі. Питомий імпульс характеризує енергетичні можливості палива і якість двигуна ракети.

### в) Коefіцієнт корисного навантаження, або відносна стартова вага ракети

$$\bar{G}_o = \frac{G_o}{G_{\text{кв}}} = \frac{M_o}{M_{\text{кв}}}, \quad (9)$$

де  $G_{\text{кв}}$  і  $M_{\text{кв}}$  - вага і маса корисного вантажу ракети.

Відносна стартова вага (маса) ракети дублюється відносними масами ступенів ракети.

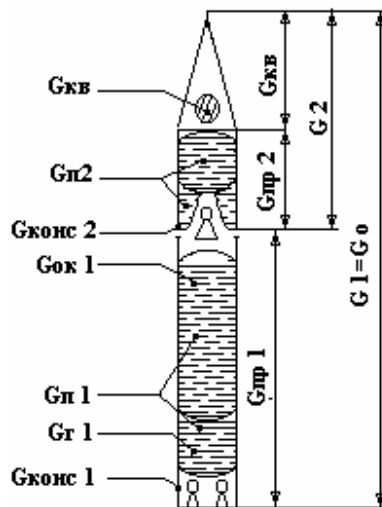


Рис.1

На рис.1 приведена будова двохступеневої ракети, де  $G_{\text{конс}}$  - вага конструкції,  $G_{\text{пр}}$  - вага прискорювача,  $G_2$  - вага другого ступеню ракети  $G_1 = G_o$  - вага першого ступеню, вона ж стартова вага. З рисунку видно, що вага ступеню складається з корисного вантажу ступеню і його прискорювача. Для першого ступеню

$$G_1 = G_{\text{пр1}} + G_{\text{кв1}} = G_{\text{пр1}} + G_2,$$

а для другого ступеню

$$G_2 = G_{\text{пр2}} + G_{\text{кв2}} = G_{\text{пр2}} + G_{\text{кв}}.$$

В склад прискорювачів входить вага палива  $G_{\text{п}}$  і вага конструкції  $G_{\text{конс}}$ . В склад двохкомпонентних палив входить вага окислювача і вага горючого:  $G_{\text{ок}}$  і  $G_{\text{г}}$ .

Під відносною масою ступеню розуміють відношення маси (ваги) ступеню до маси (ваги) його корисного вантажу:

$$\bar{G}_i = \frac{G_i}{G_{квi}} = \frac{G_i}{G_{i+1}} = \frac{M_i}{M_{i+1}}. \quad (10)$$

Легко показати, що

$$\bar{G}_0 = \bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 \cdot \bar{G}_3 \cdot \dots = \prod_{i=1}^n \bar{G}_i.$$

г) коефіцієнт конструктивної досконалості

$$S = \frac{G_{конс} + G_{п}}{G_{конс}} = \frac{M_{конс} + M_{п}}{M_{конс}}. \quad (11)$$

Цей проектний параметр дублюється коефіцієнтом відносної ваги конструкції ракети

$$\alpha_i = \frac{G_{конс i}}{G_i}. \quad (12)$$

Якщо розділити в (11) чисельник і знаменник правої частини на вагу ступені (маси), то отримаємо

$$S_i = \frac{\alpha_i + \mu_{пi}}{\alpha_i}. \quad (13)$$

д) Подовження ракети, як відношення довжини ракети  $l_p$  до її діаметра  $D$

$$\bar{l}_p = \frac{l_p}{D} \quad (14)$$

Примітка: діаметр ракети наближено можна знайти по формулі

$$D \approx 0,553\sqrt[3]{G_0}, \quad (15)$$

де  $G_0$ [Т],  $D$ [М]. Подовження сучасних РН знаходиться в межах  $\bar{l}_p = 10 \div 15$ .

Число Ціолковського  $Z$ , відносна вага ступені  $\bar{G}_i$  (коефіцієнт корисного навантаження) та коефіцієнт конструктивної досконалості  $S_i$  зв'язані між собою таким чином:

$$S_i = Z_i \frac{\bar{G}_i - 1}{\bar{G}_i - Z_i}; \quad \bar{G}_i = Z_i \frac{S_i - 1}{S_i - Z_i}. \quad (16)$$

Так як в формулі (16) знаменник має бути більше нуля, то

$$\bar{G}_i > Z_i, S_i > Z.$$

## 2. Рух багатоступневих ракет

Для того, щоб вивести космічний апарат на кругову орбіту навколо Землі на висоту  $H=200$ км потрібна характеристична швидкість близько  $10$ км/с. При швидкості витoku продуктів згорання палива  $W=3$ км/с для досягнення такої швидкості необхідно мати число Ціолковського.

$$Z = e^{\frac{v}{w}} = 2,72^{\frac{10}{3}} = 2,72^{3,33} \cong 28. \quad (17)$$

Якщо навіть вага космічного апарату ( $G$  к.в.) буде близькою до нуля, то і тоді відносна маса конструкції складатиме:

$$\frac{M_k}{M_0} = \frac{M_{конс} + M_{к.в.}}{M_0} \approx \frac{M_{конс} + 0}{M_0} = \alpha \approx \frac{1}{Z} = 0,0357,$$

тобто маса конструкції складає всього  $3,57\%$  від початкової маси ракети. Зробити ракету з такою масою конструкції сьогодні неможливо і тому для досягнення космічних швидкостей застосовуються багатоступеневі ракети. Під час руху паливо поступово витрачається і значна маса конструкції баків і деяких інших вузлів вже не використовується. Більше того – її необхідно розганяти до великих швидкостей, на що теж необхідно витратити паливо. Якби всю масу конструкції, що відпрацювала, можна було відокремити і скинути, то число Ціолковського збільшилось би, а з ним і характеристична швидкість. Вперше таку ідею висловив К.Е.Ціолковський. Якщо зробити ракету багатоступеневою, то після закінчення роботи двигуна першої ступені матимемо

$$V_1 = W_1 \ln Z_1 = W_1 \ln \frac{G_1}{G_1 - G_{п1}}. \quad (18)$$

Після відокремлення прискорювача першої ступені починає працювати прискорювач другої ступені. По завершенні його роботи швидкість зросте до

$$V_2 = V_1 + W_2 \ln Z_2 = V_1 + W_2 \ln \frac{G_2}{G_2 - G_{П2}}. \quad (19)$$

Швидкість трьохступеневої ракети зросте до

$$V_3 = V_2 + W_3 \ln Z_3, \text{ а багатоступеневої до}$$

$$V_n = V_{ц} = W_1 \ln Z_1 + W_2 \ln Z_2 + \dots + W_n \ln Z_n = \sum_{i=1}^n W_i \ln Z_i. \quad (20)$$

Якщо швидкість витоку газів усіх двигунів однакова і однакові числа Ціолковського всіх ступенів, формула (.20) спрощується:

$$V_{ц} = (W \ln Z_1 + W \ln Z_2 + \dots + W \ln Z_n) = W \ln (Z_1 Z_2 \dots Z_n) = W \ln Z^n = n W \ln Z. \quad (21)$$

З формули (21) можна знайти значення числа Ціолковського для  $n$  – ступеневої ракети

$$Z = e^{\frac{V_{ц}}{nW}}. \quad (22)$$

Для приведеного вище прикладу маємо: в випадку  $n=2$

$$Z_1 = Z_2 = Z = e^{\frac{10}{2 \cdot 3}} = 5,3$$

а в випадку  $n=3$   $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z = 3,03$ . Саме такі числа Ціолковського мають сучасні ракети-носії.

### 3. Розрахунок льотно-технічних характеристик (Л-Т.Х) ракет та КА

Як правило, вихідними даними на проектування ракет-носіїв та космічних апаратів з наземним стартом є висота робочої або проміжної орбіти і вага корисного вантажу, який необхідно доставити на робочу орбіту. Найчастіше задаються висотою проміжної орбіти з  $H=200$  км, для виведення на яку використовують два прискорювачі на рідкому паливі, або три на твердому. Для переведення на робочу орбіту з проміжної використовують ще один прискорювач, або – розгінний ракетний блок.

В якості прикладу розрахунку Л-Т.Х ракети-носія з  $n$ - прискорювачами на рідких компонентах палива розглянемо вивід корисного вантажу  $G_{к.в.}$  на проміжну орбіту  $H$ .

Будемо вважати, що відомі розрахункова швидкість  $V_{ц}$ , швидкість витоку продуктів згорання для вибраних компонентів палива  $W$ , значення відносної маси ступенів  $\bar{G}_i$ , коефіцієнти тягоозброєності  $\mu_{0i}$ , а також подовження ракети  $\bar{\ell}_p$ . Необхідно розрахувати масові, тягові і геометричні параметри ракети-носія.

Алгоритм розрахунку Л-Т.Х ракет-носіїв наступний.

1. Знаходимо значення чисел Ціолковського при умові, що  $Z_1 = Z_2 = Z = e^{\frac{V_{ц}}{nW}}$

2. Для заданої маси корисного вантажу  $M_{кв}$  і відносної маси ступенів  $\bar{G}_1 = \bar{G}_2 = \bar{G}_i$  знаходимо масу другого і першого ступенів:

$$M_2 = \bar{G}_2 \cdot M_{кв}, \quad M_1 = \bar{G}_1 M_2 = M_0.$$

3. При відомих  $M_i$  та  $Z_i$  можна розрахувати масу палива на борту прискорювачів:

$$M_{П1} = M_1 - \frac{M_1}{Z_1} \quad M_{П2} = M_2 - \frac{M_2}{Z_2} \quad M_{Pi} = M_i - \frac{M_i}{Z_i}$$

4. Знаходимо масу конструкції прискорювачів:

$$M_{конс2} = M_2 - M_{П2} - M_{кв},$$

$$M_{конс1} = M_1 - M_2 - M_{П1}.$$

5. Для заданих значень коефіцієнтів тягоозброєності розраховуємо тяги двигунів прискорювачів:

$$P_2 = \mu_{02} G_2, \quad P_1 = \mu_{01} G_1$$

**Зауваження:** Якщо сила, або вага вимірюються в [кг с] то чисельно вони дорівнюють масі в [кг]. В випадку розмірності сили в [н] вага чисельно більша за масу в  $g_0$  раз ( $\approx 10$  раз). Це особливо важливо при обчисленні прискорювання, де силу тяги обов'язково треба брати в [н].

6. Секундна масова витрата палива дорівнює

$$\dot{m}_2 = \frac{P_2}{W_2}; \quad \dot{m}_1 = \frac{P_1}{W_1};$$

7. Час роботи двигунів прискорювачів і загальний час набору швидкості можна обчислити як

$$t_1 = \frac{M_{П1}}{\dot{m}_1}; \quad t_2 = \frac{M_{П2}}{\dot{m}_2}; \quad t_K = t_1 + t_2.$$

8. Діаметр ракети знайдемо по наближеній формулі

$$D \approx 0,55\sqrt{G_0}, \text{ де } G_0 \text{ в [Т], а } D \text{ в [м].}$$

9. Довжину ракети обраховують через її подовження  $\bar{l}_p$ :

$$l_p = \bar{l}_p \cdot D$$

## 4. Запитання для самоконтролю

1. Чим відрізняється рух моторного човна від руху ракети?

**Вказівка:** проаналізуйте рух на основі закону збереження імпульсу.

2. Як залежить швидкість ракети від швидкості витoku продуктів згорання та від числа Ціолковського?

3. В Космосі сила тяги дорівнює реактивній силі. На Землі сила тяги (значення якої залежить від швидкості витoku газів) на 10-20% менша за реактивну. Як ви думаєте, чому?

4. Кінцеву швидкість ракети можна розрахувати або по формулі Ціолковського, або користуючись законом збереження імпульсу. Коли краще використовувати перший, а коли - другий спосіб і чому?

5. Що визначають числові значення проектних параметрів і навіщо вони потрібні?

6. В чому переваги багатоступневих ракет над одноступневими?

## 5. Приклади задач.

### Приклад 1.

Розрахувати для геофізичної ракети повну масу, масу конструкції та масу палива при характеристичній швидкості  $V_u = 6$  км/с, масі корисного навантаження  $M_{К.В.} = 0,6$  т, швидкості витoku газів з сопла  $W = 3$  км/с та коефіцієнту конструктивної досконалості  $S = 8$ . Як зміниться розподіл мас в складі геофізичної ракети, якщо  $S$  змінити з 8 до 9?

**РІШЕННЯ**

а) Знаходимо число Ціолковського:

$$V_u = W \ln Z \Rightarrow Z = e^{\frac{V_u}{W}} = e^{\frac{6}{3}} = 7,389.$$

б) Відносна стартова маса ракети (коефіцієнт корисного навантаження)

$$\bar{G}_0 = Z \frac{S-1}{S-Z} = 7,389 \frac{8-1}{8-7,389} = 84,65$$

в) Повна маса ракети

$$M_0 = M_{же} \bar{G}_0 = 0,6 \cdot 84,65 = 50,79 \text{ т.}$$

г) Маса ракети без корисного вантажу (маса прискорювача)

$$M_{ПР} = 50,79 - 0,6 = 50,19 \text{ т.}$$

д) Маса палива

$$M_{ПАЛ} = M_{КОНСТР} (S-1) = M_{КОНСТР} (8-1) = 7 M_{КОНСТР},$$

а розділивши масу прискорювача в відношенні 7:1 одержимо:

$$M_{ПАЛ} = 43,92 \text{ т.}, \quad M_{КОНСТР} = 6,27 \text{ т.}$$

е) При  $S=9$ ,  $G_0=36.69t$ ,  $M_0=22,02t$ ,  $M_{ПР}=21.42t$ ,  $M_{КОНСТР}=2.68t$ .

ж) Масовий склад ракети:

I вар.	II вар.
$M_{пал} = 43,92 t$	$18,78t$
$M_{констр} = 6,27 t$	$2,68t$
$M_{к.н.} = 0,6 t$	$0,6t$
$M_0 = 50,79 t$	$22,02t$

## Приклад 2.

Розрахуйте розподіл мас двохступеневої ракети, яка повинна надати вантажу характеристичну швидкість  $12 \text{ км/с}$  при швидкості витоку продуктів згоряння на кожній ступені  $3 \text{ км/с}$ . Коефіцієнт конструктивної досконалості  $S_1=S_2=10$ ,  $Z_1=Z_2$ .

### РІШЕННЯ

а) Знаходимо числа Ціолковського ступенів

$$Z = e^{\frac{V_u}{W \cdot n}} = e^{\frac{12}{3 \cdot 2}} = e^2 = 7,39.$$

б) Розрахунок розподілу маси треба розпочати з другої ступені. Відносна стартова маса (коефіцієнт корисного навантаження) другої ступені:

$$\bar{G}_2 = Z_2 \frac{S_2 - 1}{S_2 - Z_2} = 7,39 \frac{10 - 1}{10 - 7,39} = 25,5$$

в) Маса другої ступені з корисним вантажем:

$$M_2 = M_{КВ} \bar{G}_2 = 0,6t \cdot 25,5 = 15,3t.$$

г) Маса прискорювача другого ступеня:

$$M_{ПР2} = M_2 - M_{КВ} = 15,3 - 0,6 = 14,7t.$$

д) Маси конструкції та палива знаходяться у відношенні  $1:9$ , тобто

$$M_{КОНСТР2} = \frac{M_{ПР2}}{10} = 1,47t, \quad M_{ПАЛ2} = 9 M_{КОНСТР2} = 13,23t.$$

е) Розрахунок характеристик 1 ступені ведемо в тій же послідовності:

$$\bar{G}_1 = Z_1 \frac{S_1 - 1}{S_1 - Z_1} = 25,5$$

$$M_0 = M_1 = \bar{G}_1 M_2 = 15,3t \cdot 25,5 = 390t;$$

$$M_{ПР1} = M_1 - M_2 = 390 - 15,3 = 374,7t;$$

$$M_{КОНСТР1} = M_{ПР1} / 10 = 37,47t;$$

$$M_{ПАЛИВА1} = M_{ПР1} - M_{КОНСТР1} = 374,7t - 37,47t = 337,23t.$$

ж) Масовий склад ракети:

$$M_{к.н.} = 0,6t,$$

$$M_{пал2} = 13,23t,$$

$$M_{констр2} = 1,47t,$$

$$M_{пал1} = 337,23t,$$

$$M_{констр1} = 37,47t,$$

$$M_0 = M_1 = 390,00t$$

## 6. Вправи

**Вправа 1.** Розрахуйте льотно-технічні характеристики геофізичної ракети з характеристичною швидкістю  $V_u=6 \text{ км/ч}$ , масою корисного вантажу  $M_{КВ}=0,1t$ , швидкістю витоку реактивного струменя  $W_1=W_2=3 \text{ км/с}$ , коефіцієнтом конструктивної досконалості  $S_1=S_2=8$ . Число ступенів  $n=2$ , значення коефіцієнтів тягоозброєності  $\mu_{01} = \mu_{02} = 2$  і подовження  $\bar{l}_p = 10$ .

**Відповідь:**  $M_{конс1} \approx 0,13 t$ ,  $M_{конс2} = 32,5 \text{ кг}$ ,  $P_1 = 2530 \text{ кг}\cdot\text{с}$ ,  $P_2 = 707 \text{ кг}\cdot\text{с}$ ,  $D = 0,6m$ ,  $l_p = 6 m$

**Вправа 2.** Яку характеристичну швидкість може розвинути двохступнева ракета з масою корисного вантажу  $M_{\text{кв}}=1\text{т}$ , якщо час роботи двигуна першої ступені  $t_1=120\text{ с}$ , час роботи двигуна другої ступені  $t_2=180\text{ с}$ , тяга першого двигуна  $P_1=80\text{ т.с.}$ , тяга другого двигуна  $P_2=15\text{ т.с.}$ , питома тяга  $P_{\text{пит}1}=300\text{ с}$ ,  $P_{\text{пит}2}=350\text{ с}$ , коефіцієнти конструктивної досконалості  $S_1=S_2=10$ . Знайти також діаметр і довжину ракети, якщо  $\bar{l}_p=10$ .

**Відповідь:**  $V_{\text{ц}}=10030\text{ м/с}$   $l_p=19,2\text{ м}$   $D=1,92\text{ м}$

**Вправа 3.** На ракеті з масою  $100\text{ т}$  розташований двигун з тягою  $P = 1,5 \cdot 10^6\text{ Н}$ . Питомий імпульс двигуна  $I_{\text{пит}}=3500\text{ м/с}$ . Відносна маса палива на борту ракети  $\mu_{\text{п}} = 0,8$ , коефіцієнт корисного навантаження  $\bar{G}_0 = 30$ . Знайти масу корисного вантажу і масу конструкції ракети, характеристичну швидкість, час роботи двигуна, прискорення на початку, в середині і в кінці роботи двигуна, побудувати графік прискорення від часу роботи двигуна.

**Відповідь:**  $M_{\text{кв}}= 3,33\text{ т}$ ,  $V_{\text{ц}}= 5650\text{ м/с}$ ,  $t_{\text{к}}= 186\text{ с}$ ,  $a_0= 15\text{ м/с}^2$ ,  
 $a_{1/2\text{ тк}}= 25\text{ м/с}^2$ ,  $a_{\text{к}}=75\text{ м/с}^2$

## ЛІТЕРАТУРА

1. В.Ю.Шевцов. Проектування космічних апаратів., ДНУ, Дніпропетровськ, 2008, 100с.
2. Н.И.Паничкин, Ю.В. Слепушкин и др. Конструкция и проектирование космических летательных аппаратов. Машиностроение, Москва, 1986, 344с.
3. А.Д.Марленский. Основы космонавтики, Просвещение, Москва, 1985, 158с.