ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

підготував Шевцов Василь Юхимович, к.т.н.

Людина в своєму житті спілкується з іншими людьми за допомогою мови. З оточуючим людину середовищем, з усім тим, що називаємо природою, людина спілкується за допомогою дещо специфічної мови під назвою «математика». За пройдешні сторіччя математика настільки розширила границі своєї території, що навіть математики перестали розуміти один одного. Більшість математиків, обравши невеличке поле своєї уваги і діяльності, дуже багато знають про «ніщо» і майже «нічого» про все, мається на увазі сама математика. Ще на початку ХХ сторіччя Гільберт на другому всесвітньому конгресі математиків виклав своє розуміння проблемних питань математики, відомих нині під «проблемами Гільберта». Але й до Гільберта, мабуть починаючи від Зенона (його знаменитих апорій) і Піфагора (згадайте його знамените «числа керують світом»), Евкліда (аскіоматизація геометрії та інших розділів математики) і Аристотеля (питання логіки в математиці), багато математиків формулювали важливі для побудови і розвитку математики проблеми. Нижче зупинимось лише на деяких із них, сподіваючись, що серед тих, кого цікавить математика, знайдуться дослідники і інших її проблем.

1.Проблема логіки.

Математика стоїть на двох підвалинах: на математичній логіці і на методі індукції. Та ще в давній Греції крітянин Епімінід Крітський сказав: всі крітяни брехуни. Якщо вислів вірний, то Епімінід збрехав; а якщо він збрехав, то не всі крітяни брехуни і може Епімінід правду каже, що всі крітяни брехуни. Як бачимо – логіка в цьому випадку, як і в деяких інших, не працює. На чому ж побудована логіка? Чи це властивість природи, чи риса нашої свідомості? Чи можна довіряти правилам логіки, чи ні?

Задача: Подумайте над парадоксами логіки (Зенона, Епімініда, Рассела), а також чому логіка людини двохзначна (так-ні), які логічні операції використовуються людиною і яким фізичним ефектам вони відповідають? Чи можна «придумати» іншу логіку?

Орієнтири. Щоб стверджувати справедлива логіка чи ні, необхідно перш за все пояснити її походження. Оскільки все в цьому світі двополярне («+» і «-», N і S, добро і зло, вихори по годинниковій стрілці і проти неї, ліве і праве, так і ні, вірно-невірно і т.п.), то має бути особливість природи, що задає двополярність. Можливо, що це ефект обертового руху. Точка і лінія обертатись не можуть (немає простору, в якому можна було б обертатись). А ось площина уже може обертатись навколо точки, об'єм навколо точки і навколо осі (на дві координати менше ніж кількість координат тіла, що обертається). Наш простір тривимірний і обертання навколо осі утворює два вихори: по годинниковій стрілці і проти, що, в свою чергу, відображається в двох полюсах, в «так» і «ні», «за» і «проти». Якби ми жили в чотиривимірному просторі, то обертання стало б можливим навколо точки, лінії і площини. Але площина має два виміри і обертання навколо тої чи іншої координати породжує чотири полюси. То може в чотиривимірному світі логіка теж чотиривимірна? Але тоді там має бути багато в чому відмінна математика, і незвичною для нас фізика.

Подейкують, що до Аристотеля було багато правил логіки (у євреїв їх кількість доходила до сорока; а кому невідома «жіноча» логіка?). Аристотель «навів порядок», залишивши три правила логіки: Якщо є дві множини А і В, то, в залежності від їх взаємодії говорять: якщо В то А (коли множина В знаходиться в множині А); або А, або В (коли множини виключають одна одну); і А, і В (якщо множини об'єднані), теж саме ні А, ні В. Згідно з теорією множин, існують ще 2 операції: якщо А і В, то С (де С – перетин множин, їх частина, що має властивості і А, і В); якщо А, то не В (та частина А, що не перетинається з В. Оскільки правила логіки не повністю співпадають з теорією множин, то може змінити правила «гри»? Розглянуті логічні операції віднесені до множин (структур) у просторі. Але двозначність логіки може задаватись і однокоординатним (одновимірним) часом, бо у нього теж два кінці: так (в майбутнє) і ні (в минуле).

Зважаючи на те, що основними об'єктами в природі є процеси в часі та структури в просторі, логіка має задовольняти і тому і іншому. При цьому важливо не забути теорему ергодичності, згідно з якою результат випробувань при ймовірності наслідків 0,5 (вліво – вправо) у часі співпадає з результатом у просторі. Важливо також зазначити, що до математичної логіки входить «теорія доведення», в якій дуже важливо дотримуватись правил синтаксису математичної мови. Як ви вважаєте, чому?

Розглядаючи двозначну логіку природи, ми забуваємо про логіку людини (як і живого взагалі).

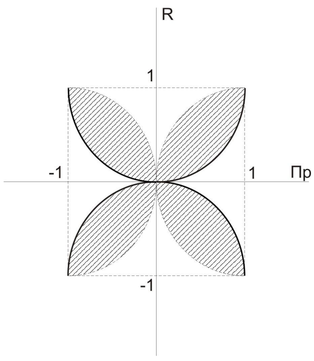

Рис.1

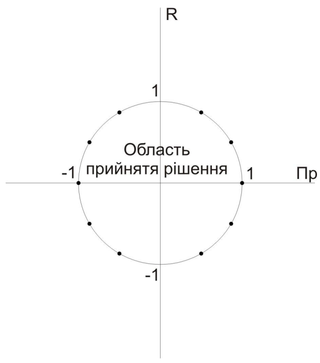

Рис.2

В людській логіці, на відміну від математичної, рішення часто не зводяться до «так» і «ні». Велике значення в прийнятті рішення людиною відіграють емоції. Якщо розглянути простір прийняття рішень (рис.1), де R – реакція на інформацію, а Пр – прийнятність рішення, то у людини реакція тим сильніша, чим більше інформації. Як відомо, область прийняття рішення розмита і залежить від психології того, хто його приймає. А тому можлива взагалі інша модель (рис.2) в якій реакція може бути тим більшою чим менше інформації на прийняття рішення. Цікаво дослідити процес прийняття рішення по вікових групах та від психотипу людини.

2. Метод індукції.

Як уже зазначалось, математика базується на математичній логіці та на методі індукції. Згідно з останнім, «якщо щось відбулось n раз, то воно відбудеться і n+1 раз. Та чи дійсно це так? Чим зумовлена впевненість математиків в тому, що і на n+1 кроці буде теж саме?

Задача. Оскільки математика є відображенням, знаковою моделлю природних процесів і структур, то метод індукції має бути обґрунтованим фізично. Що є такого в природі, що дозволяє (чи заперечує) використання методу індукції в якості універсального інструменту математики?

Орієнтири. Метод індукції, інтуїтивно, будується на припущенні безмежності плину часу і безмежності простору, при тому що виконуються вимоги однорідності і незмінності того чи іншого. В той же час досвід готовить протилежне: нічого безмежного не існує (правда досвід наш теж обмежений). На якійсь стадії розвитку кількість переростає в нову якість, а та , в свою чергу, продукує нову кількість (структурну) і т.д. Це відомий у фізиці принцип енергодинамічної пари: якщо через дві різні структури (різні хоча б по одному параметру) пропустити потік якогось фізичного параметру, то на цьому потоці в цих структурах утвориться кільце-потік (або кілька) іншого параметру (інших параметрів). Утворення нових структур і нових потоків може відбутись лише за умови формування критичної кількості (критичної маси ядерного заряду, критичного об'єму інформації для вирішення поставленої задачі, критичного запасу енергії і т.д.). В межах формування критичної кількості, критичного значення потоку «працюватиме» метод індукції. Іншими словами застосування методу індукції обумовлюється межами процесу, а тому при створенні математичної моделі процесу необхідно врахувати цю обставину, щоб висновки, отримані за припущення безмежності не привели до абсурду.

3. Оператори. Взаємопереходи операторів.

Межі застосування. Під операторами розуміють дію, в результаті якої елементи однієї множини (знакової, модельної, чи фізичної) переходять в елементи іншої. Всім відомі оператори додавання «+», віднімання «-», множення «х», ділення «:». Якщо треба перемножити числа одної основи – виконується операція підведення в ступінь - a^n, а якщо треба знайти основу при відомих значеннях ступеню і числа, то знаходиться корінь – «$\sqrt{\ }$». Для знаходження невідомого показника ступеня користуються операцією логарифмування ($a^x=c \rightarrow x=\log_a C$). Якщо досліджується процес, то для знаходження швидкості беруть похідну від шляху в часі ($(\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S_2-S_1}{t_2-t_1}=\rightarrow\frac{ds}{dt}=S)$, а якщо відома швидкість, то можна знайти шлях (S=∑(V(t)dt), знаходячи суму (а при $\Delta t\rightarrow 0$ інтеграл). Список операторів можна продовжити, але, в той же час, всі оператори, що існують в математиці, можна виразити через один із операторів, наприклад через «+». Питання лише в тому, чи є оператори незалежними від тих, що можуть виражатись через «+», чи завжди оправдане використання тих чи інших операторів (чи не приведе дана «посилка» до неадекватного результату і які межі використання того чи іншого оператора.

Задача. Досліджуючи різні фізичні явища та процеси зробити висновки відносно їх «універсальності», на чому вони побудовані, окреслити область використання того чи іншого оператора.

Орієнтири. Для відповіді на поставлені питання спробуйте скористатись теорією множин, точніше уявленнями про множини. Наприклад, якщо візьмемо дві множини А і В, то скласти їх можна. Результатом складання буде їх сума. Але це за умови що А і В мають одну і ту ж природу. А якщо множини частково перетинаються, тобто А – це множина елементів одного параметра, В – іншого, але є елементи яким присутні обидва параметри, то в цьому випадку А+В $\neq$ (А+В) (рис.1). Подібні результати отримаємо якщо розглядатимемо об'єкти афінної геометрії, в якій осі можуть розташовуватись під кутом $\alpha < або > .\frac{\pi}{2}$ (рис.2), або в геометрії Рімана-Лобачевського, де 2х2 $\neq$ 4 (рис.3).

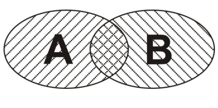

Рис.1

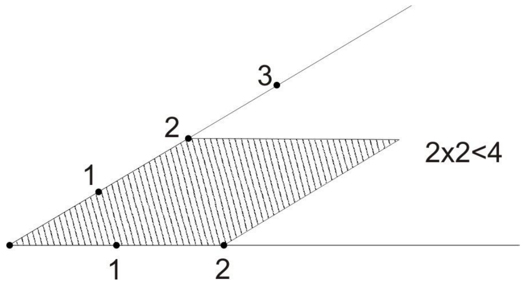

Рис.2.

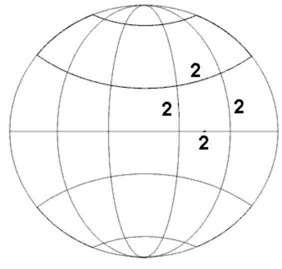

Рис.3

Не завжди множення «+» на «+», або «-» на «-» дає плюс. Так, якщо в тривимірному просторі замінити дві координати «+» на координати «-», получимо об'єкт подібний до попереднього, але із зміненим знаком третьої координати, хоча (-)х(-)=+; Подумайте також над тим, чи можна застосувати оператори до безмежних множин.

4. Гіпергеометрична функція в математиці.

Більшість функцій (а із тих, що вивчають в школах та університетах майже всі) можуть розкладатись в ряди, наприклад

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...,$$

$$arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + ...,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4...}$$

Математики помітили, що всі безперервні, маючі похідні (аналітичні) функції (на зразок приведених вище), можна представити як часткові випадки одної єдиної гіпергеометричної функції, що розкладається в ряд:

$$F(a, в, c, x) = 1 + \frac{ав}{1\cdot c}x + \frac{a(a+1)\cdot в(в+1)}{1\cdot 2c(c+1)}x^2 +$$
$$+ \frac{a(a+1)(a+2)\cdot в(в+1)(в+2)}{1\cdot 2\cdot 3\; c(c+1)(c+2)}x^3 + ...,$$

Як можна бачити з самого запису гіпергеометричного ряду, функція F відображає різноманіття декартового простору з трьома просторовими координатами і одною перемінною – часом. Вона є немов би межею тих закономірностей в природі, які ми вивчаємо. Зі зміною кількості координат простору і часу має змінитись і гіпергеометрична функція, вона стане узагальненням процесів і структур іншого світу. Та чи дійсно гіпергеометрична функція узагальнює всі аналітичні функції, чи існують інші узагальнюючі функції – невідомо.

Задача. Запис різних функцій через гіпергеометричну відповідає різним значенням а, в і с, і навіть х (як відповідних часу t) виступає в різних ступенях, Яким функціям і яким процесам відповідатиме гіпергеометрична функція в результаті змін а, в і с = 1, 2, 3 та залежності від х в різних ступенях. Спробувати також дослідити варіанти F (a, в, c, d, x), F=(a, в, x_1, x_2) та т.п. Подумайте над можливими варіантами функцій, що не входять в гіпергеометричну.

Орієнтири. При дослідженні гіпергеометричної функції зверніть увагу на відомий факт формування розподілів ймовірності. При ймовірності двох наслідків Р=0,5 формується так званий нормальний розподіл. Але якщо на цей механізм накласти механізм якоїсь аналітичної функції, то отримаємо (кожного разу інший) розподіл ймовірностей. Відповідно всі функції, що розкладаються через механізм гіпергеометричної функції (ряду) є результатом якогось вихідного, властивого самій природі, процесу на який накладаються конкретні фізичні механізми впливу (про формування нормального розподілу ймовірностей дивись пункт 5).

5. Ймовірність і розподіл ймовірностей.

В теорії математичної статистики відомо багато різних розподілів ймовірності. Фундаментальним розподілом є нормальний, що формується за схемою коефіцієнтів бінома Ньютона (трикутник Паскаля) :$(а+в)^n$.

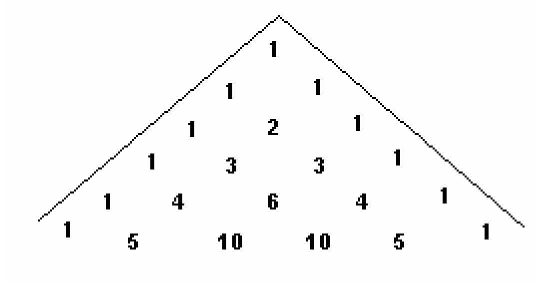

Рис.1

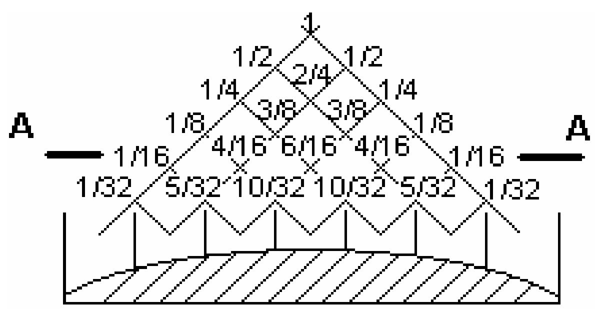

Рис.2

Якщо побудувати систему трубок одного діаметру і сипати в них пісок (.рис.   ), то через n кроків отримаємо біноміальний розподіл, а при n→ ∞ -- нормальний розподіл:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi G}}\exp\left[\frac{(x-a)^2}{2\sigma}\right],$$

Якщо в схемі (рис.2) змінити співвідношення діаметрів трубок, або обрізати їх частину збоку, всередині, то отримаємо багато інших розподілів. Але ще ніхто не довів, що всі існуючі розподіли є варіаціями нормального в просторі і пуассонівського в часі (дивись розріз не по Х, а по t): $P(t)=\frac{t^m}{m}e^{-t}$,

де а – математичне очікування; σ – середньоквадратичне відхилення; m- число подій.

Задача. Змінюючи механізми розподілу довести, що всі існуючі розподіли ймовірності є нормальними, пуассонівськими або комбінованими розподілами з накладеними на них фізичними механізмами (детермінованими функціями). Спробувати знайти механізми формування фундаментальних та похідних від них розподілів.

Орієнтири. Нормальний розподіл формується при двохточкових наслідках випробувань: «так» і «ні», «+» і «-», вліво або вправо… Оскільки двополюсність є фундаментальною рисою нашого тривимірного в просторі і одновимірного в часі Всесвіту, то і нормальний розподіл має бути фундаментальним. В той же час коефіцієнти бінома Ньютона з’являються в деяких інших, не маючих відношення до бінома випадках. Наприклад у випадку:

$tg(2A+2B)_{A=B}= tg4A=\dfrac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$, бачимо ($1\ ^4\ 6\ ^4 1$) ті ж коефіцієнти в тригонометричній функції, хоча і розташованих дещо інакше.

Для тих, кого зацікавить дана проблема, важливо звернути увагу на проблему ергодичності, за якою результати статистичних випробувань у часі (кидаємо 1000 раз одну монетку) співпадає з результатом у просторі (кинути одночасно 1000 монет). Той же ефект буде коли в воронку (Рис.2) висипмо 1кг піску, чи будемо сипати по 1 піщинці. Необхідно також акцентувати увагу на механізмах перерозподілу якогось параметру в просторі і часі. Так в дифузійних процесах, процесах теплопровідності і тертя це механізм P_i=0,5. Але ще Крилов довів, що на різних рівнях організації матерії домінуючими можуть бути інші механізми перерозподілу, наприклад механізм турбулентності (тертя обертового руху рідини або газу менше тертя поступального, площинного руху). Крім того, всі механізми перерозподілу параметрів за своїм характером є різновидами фрактальних структур. Тож спробуйте дослідити зворотну задачу: по виду фрактала знайти механізм і вид розподілу ймовірностей.

6.Фрактали в математиці і фізиці.

У фізиці, відповідно і в математиці, безліч структур, про які можна сказати: куди не подивись, скрізь одне й теж саме. Подібні структури називаються фрактальними, або ламаними. Чи це дерево (гілка, від неї гілки, від гілок гілочки і т.п.), чи кровоносна система, чи система збору води в річку, чи процес розмноження кролів, чи будова всесвіту, чи будова берегової лінії океану – прикладам не буде кінця – все це приклади фрактальних структур. Як взагалі формуються фрактали, які фізичні механізми зумовлюють будову і розростання фракталу, де межі розростання фрактальної структури, як формуються фрактали в просторі і в часі, чим відрізняються фрактали структур в просторі і в часі та фрактали живого від неживого?

Задача. Досліджуючи різні за початковим елементом (трикутник, сфера, піраміда і т.п.) і за фізичним змістом фрак тали, спробувати дати їх класифікацію, враховуючи ще й процес формування фрактальної структури. Після дослідження простих фракталів перейдіть до більш складних; таких, в яких одна фрактальна структура на якомусь кроці змінюється іншою, а та, в свою чергу наступною і т.д. з тим, щоб через n кроків повернутись до вихідного фракталу (дерево,$\rightarrow$ листя, $\rightarrow$ квіти, $\rightarrow$ плоди, $\rightarrow$ насіння, $\rightarrow$ дерево$\rightarrow$, листя…).

Орієнтири. Характерними особливостями фрактальних структур є те, що а) кінцевий вид фрактала часто визначається не вихідною фігурою, а алгоритмом формування; б) фрактальна структура має дрібну розмірність ; в) самоподібність, коли частина і ціле подібні одне одному; г)фрактали, поступово заповнюючи простір, залишають його частину для подальшого заповнення.

Принцип фрактальності закладений в усі еволюційні процеси. Д.Конвел відтворив ідею фрактальності в грі «життя». Якщо всі клітини аркуша паперу позначити в якості живих при наявності в їх середині точки і мертвих при її відсутності, а також ввести правила, при яких клітина «оживає» при наявності трьох живих сусідів, не змінює стану при n=2 і гине при n=1, або n=4 (всього сусідів у кожній клітині 8: чотири по боках і чотири по кутах), то початкова фігура почне еволюціонувати, розвиватись і рухатись, розмножуватись, набувати імунітет, завойовувати життєвий простір, захищатись. Приклади варіантів при «житті» приведені на рис.1, де а)- планер, б)- крокодил. Спробуйте самі знайти подібні фігури «життя», і не лише у вигляді моделей на папері, а й спостерігаючи за об’єктами і явищами в природі. Спробуйте знайти відповіді на такі питання як: що зупиняє розбудову фрактала на конкретній межі (чи дерева, чи носа у людини, чи популяції) як фрактал залежить від зовнішніх умов та наявності джерел енергії для його розмноження.

7. Інваріанти в математиці і фізиці.

Кожний об’єкт, система, структура, процес будується на одному або кількох інваріантах. Під інваріантами розуміють закони, константи, властивості, співвідношення та т.п., що не можуть змінитись до тих пір, поки існує система, об’єкт, розділ знань, область господарювання і т.д., що побудовані на конкретних інваріантах. Зміна хоча б одного параметра, закону, властивості… змінить об’єкт і зробить неможливим його функціонування в попередньому режимі. Які інваріанти визначають структуру і властивості розділів математики, наскільки вони відповідають фізичним інваріантам і які наслідки можуть очікувати систему в разі порушення хоча б одного із інваріантів її будови?

Задача. Розглядаючи різні розділи знань, різні галузі виробництва, економіку і т.д. спробуйте визначити інваріанти, їх відповідність фізичним реаліям та спрогнозувати наслідки порушень одних інваріантів з можливою заміною на інші інваріанти.

Орієнтири. Кожен об'єкт відповідає своєму призначенню, а тому у об'єкта має бути те, що дозволить виконати задачу (зовнішня сторона) і те що забезпечить існування самої системи (внутрішня сторона). І перше і друге має забезпечуватись незмінними параметрами – інваріантами. Більшість зовнішніх по відношенню до людини систем розвиваються у відповідності з невідомими нам задачами, але досліджуючи інваріанти будови системи можна зробити певні висновки і відносно призначення самої системи.

Відомим прикладом інваріантів є постулати Евкліда в геометрії. Зняття обмеження лише з одного (про паралельність прямих) призвело до формулювання геометрій Лобачевского – Рімана (геометрій «кривих» просторів). Важливими інваріантами геометрії Евкліда є перпендикулярність осей, «прямизна» ліній та однорідність і ізотропність простору (метр скрізь має залишитись метром, а рух незалежним від напрямку). Для евклідової геометрії має зберігатись і відношення довжини кола до діаметра – π=3,14… Порушення хоча б одного із перерахованих інваріантів призведе і до зміни геометрії простору.

У фізиці однорідності простору відповідає інваріантний закон збереження кількості руху, ізотропності простору – момент кількості руху, а однорідності часу – закон збереження енергії. Якщо до цих законів добавити ще й закон тяжіння, отримаємо набір інваріантів розділу фізики «Механіка» (окрім тих, що там вже є: маси і моменту кількості руху електрона і протона, гравітаційної постійної та т.п.).

Розглянуті приклади відносяться до окремих частин будови Всесвіту і майже нічого не говорять про «призначення» самого всесвіту (так само, як стандарти – інваріанти роботи печінки нічого не говорять про призначення людини). В цьому відношенні більш зрозумілими є «інваріанти» трактора для польових робіт. Спробуйте вичленити те, що не повинно змінюватись поки трактор не завершить весь цикл польових робіт.

8. Симетрії і закони збереження.

На початку XX сторіччя знаменита жінка-математик, Еммі Ньотер, довела надзвичайно важливу теорему: Кожному закону збереження відповідає свій вид симетрії, кожному виду симетрії відповідає свій закон збереження. Згідно з цією теоремою однорідності простору відповідає закон збереження кількості руху, ізотропності простору – моменту кількості руху, однорідності часу – закон збереження енергії. Та чи дійсно це так? Чи кожному закону збереження відповідає свій вид симетрії? Тим більше, що для кожної консервативної системи можна ввести свої закони збереження.

Задача. Розглядаючи природні і штучні консервативні системи (системи, в яких хоча б один параметр не змінюється протягом часу виконання задачі), сформулювати для них закони збереження і спробувати визначити види симетрій що їм відповідають. (Зауваження: Можливо, що теорема Ньотер справедлива лише для операцій перетворення простору і часу і не годиться для складних об'єктів і систем).

Орієнтири: Перерахованим вище законам збереження відповідають операції безперервних перетворень простору і часу, до яких також відноситься збереження параметрів системи, що рухається з постійною швидкістю, або закон збереження енергії – імпульсу. Окрім групи безперервних перетворень розрізняють групу дискретних перетворень простору і часу. Ця група пов'язана з операціями повороту і відбиття (як від дзеркала). До операцій повороту також відносяться інверсійний поворот, гвинтовий поворот, ковзне відбиття. З групою дискретних перетворень пов'язані операції заміни лівого на праве (просторова інверсія), зміна напрямку часу (часова інверсія) і заміна «+» заряду на «-» заряд (зарядова інверсія, або зарядове спряження). Порушення якої завгодно з перерахованих симетрій компенсується порушенням другої (або кількох) симетрії. Існують і інші види симетрій, наприклад, групи симетрії відносної перестановки однакових об'єктів; групи внутрішніх симетрій різних об'єктів, симетрії біооб'єктів, та інше.

При дослідженні даної проблеми зверніть увагу на те, що закони збереження виконуються лише для консервативних систем. Але чи завжди законам збереження відповідає якась симетрія не ясно (не зважаючи на теорему Ньотер). Наприклад для герметичної банки консервованих огірків можна ввести закон збереження огірків (аж доки банку не відкриють). Але який вид симетрії відповідає цьому закону?

9. Парадокси теорії множин.

Поняття безмежності витікає з людського досвіду і базується на методі індукції: якщо подія відбулася n раз, то і n+1, і n+2 і n+… рази буде відбуватись теж саме, до безмежності. Інтуїтивно поняття безмежності пов'язано з нашими уявленнями про простір, час і число. Та чи дійсно безмежність безмежна? Чи існують безмежності в природі? Чи відповідають людські уявлення про безмежність дійсності?

Задача. Досліджуючи і порівнюючи математичні і фізичні безмежності дати їх порівняльний аналіз, відзначити протиріччя, запропонувати шляхи подолання парадоксів теорії множин.

Орієнтири. Математики розділили безмежності на потенціальні і актуальні. Перші пов'язують з неможливістю досягнення границі із-за її відсутності) або конкретного значення (наприклад числова послідовність), другі - з безмежним наближенням до границі, знову таки недосяжної (наприклад гіперболи до прямої, що її обмежує). При розгляді будови безмежних множин людина стикається з першим парадоксом: як усвідомити кінцевим числом нейронів мозку нескінчене? Ще еллінський філософ Зенон сформулював кілька парадоксів на якісних відмінностях дискретного і безперервного, що відносяться до основних понять теорії множин. Якщо з точки А в точку В вибіг самий швидкий бігун Греції Ахіллес, а в ту ж мить з точки В виповзла черепаха, то Ахіллес її ніколи не наздожене. Доки Ахіллес бігтиме до точки В, черепаха доповзе до точки С, поки Ахіллес добіжить до точки С, черепаха добереться до точки Д і так до безмежності. Всі знають, що Ахіллес обжене черепаху, але ж де логіка… З подібними парадоксами теорія множин стикається безперервно. Як з точок, що не мають товщини, утворюється лінія, що має довжину, а з ліній, не маючих товщини, -- площина, з площин – простір? Чому довжину кола не можна виміряти довжиною радіуса (або діаметра)? Чому числа $\pi, e\ i\ \varphi$ безмежні? Чому задача трисекції кута (як за допомогою лінійки і циркуля розділити кут точно на три рівних кути?) не вирішується геометрично, але можна вирішити її кінематично (рухом)?. Чому одне і теж може виступати як ціле (дискретне) і не мати межі (безперервне)? Приклад останньому теж співвідношення між довжиною кола і діаметром.

Одним з важливих парадоксів в теорії множин є парадокс Кантора про те, що між нулем і одиницею чисел в безмежне число раз більше за безмежну послідовність натуральних чисел. Якщо скласти матрицю з чисел по осі Х і по осі У з чисел 0,0123… до 0,9999…, то кожний стовпчик вже буде безмежністю в безмежності чисел рядка. На цьому прикладі Кантор показав що потужність (кількість) чисел між нулем і одиницею на безмежність перевищує число чисел безмежного ряду натуральних чисел. (Спробуйте дослідити композиції з потенціальної, безмежної множини натуральних чисел і актуальної множини чисел, що послідовно наближаються до границі! Подумайте в чому логічний парадокс в доведенні Кантора?). До парадоксу Кантора додаються і інші, наприклад парадокс Сколема, який показав що безмежність в просторі можна відобразити на кінцевий відрізок $У=\frac{1}{1-x}$, де х – змінюється від двох до ∞. Більше того, якщо відрізок між нулем і одиницею поділити на три частини і викинути середній; з тих, що залишились теж викинути третю частину (середню) і так до безмежності, то те що завжди залишатиметься матиме кількість чисел більшу, ніж кількість чисел натурального ряду (бо навіть одна точка в ряду – це безмежний ряд у стовпчику). В той же час можна довести, що кількість точок площини дорівнює (на безмежності) кількості точок на прямій. Всі парадокси з'являються тоді, коли ми починаємо змішувати дискретне, конечне, з безперервним. Чим же відрізняється дискретне від безперервного?

10. Катастрофи в математиці і в фізиці.

Більшість функцій, відомих читачу, безперервні і не мають якихось особливостей. Розрахувати, або передбачити їх поведінку можна, а як бути з функціями на зразок броунівського руху молекул? Як передбачити поведінку людини на перехресті у випадку рівнозначності шляхів? Можна розрахувати поведінку газу до рівня температури його конденсації в рідину. В рідкому стані речовина веде себе у відповідності до законів рідини, а при ще більше низькій температурі, після фазового переходу це будуть закони твердого тіла. Точка, в якій функція змінює свою поведінку, називаються особливою, або катастрофою. З якими «катастрофами» має справу математика? З якими катастрофами зтикається фізика, які види катастроф притаманні людині, суспільству, біосфері?

Задача. Вибрати якийсь клас явищ, відстежити «катастрофи» притаманні цим явищам, спробувати класифікувати їх за механізмами виникнення та за наслідками; відповісти на питання можливості прогнозування «катастроф» і очікуваних наслідків та можливості, при необхідності, їх попередження.

Орієнтири. В математиці до особливих точок відносять:

а) розриви функції першого роду (приклад: якщо будувати залежність пройденого шляху від часу, то функція буде гладкою до моменту переключення швидкості. В цій точці графік S(t) ламається (точка злому), а швидкість змінюється стрибком;

б) розриви другого роду, коли сама функція терпить розрив (наприклад залежність густини речовини від температури, коли газ сконденсувався в рідину);

в) розриви третього роду, коли стрибком змінюється прискорення (наприклад: в момент початку дії сили, або роботи двигуна);

г) точки мінімуму і точки максимуму на графіку функції, або максимально чи мінімально можливе значення якогось параметру в явищі;

д) точки перегину функції (наприклад зміни прискорення із зростання швидкості на гальмування);

е) точки – полюси, або стоки і витоки якогось параметра (наприклад енергії);

ж) точки членування процесу (коли гілка розділяється на дві – це є точки біфуркації, або коли кілька функцій зливаються в одну);

з) вузлові точки процесу (ті ж перехрестя, наприклад);

ч) сідла, в яких по одній осі в даній точці мінімум, а по іншій – максимум.

З погляду фізики катастрофами є точки, лінії і поверхні, в яких досліджуваний процес зазнає якісних або кількісних змін у результаті перетворення одного, або декількох параметрів в нуль при стрибкоподібній зміні одного або декількох параметрів впливу на процес. Це мембрана (точка, лінія, поверхня розділу, що відповідає виродженому стану процесу чи структури), граничні значення досліджуваного параметру.

До катастроф відносяться не лише особливі точки процесів, а й структури сформовані цими процесами. В геометричних тілах це вершини, ребра і грані багатокутників, в суспільстві – різні його стани в залежності від джерел енергії, що споживається, та тому подібне.

Якщо ви подивитесь пильним поглядом навколо себе – скрізь побачите безліч особливих точок, ліній, поверхонь катастроф, тож для дослідження можете обрати який завгодно клас явищ, процесів, структур.